Место для шифра
343

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ 2020/21 УЧЕБНОГО ГОДА

по математике
(предмет)

учащего(ей)ся 10 класса

МКОУ СОШ № 10 с. Покровского

Агеевского Кирилла Витальевича
(фамилия, имя, отчество (полностью, в родительном падеже)

Учитель (наставник):
Калугина Валерия
Николаевна

343

Ставропольский край

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников

2020/21 учебного года

Математика

10 класс

1. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + 2a - 5 = 0$ будет минимальной.

2. Чему равна площадь вписанной в окружность трапеции, если диагональ этой трапеции равна 2, а из центра окружности боковая сторона трапеции видна под углом 60°?

3. На доске записаны натуральные числа, которые образуют арифметическую прогрессию. Оказалось, что сумма нечетных чисел равна 33, а сумма четных чисел равна 44. Найти первый и последний члены этой прогрессии, а также их количество, если известно, что эта прогрессия начинается с четного числа и содержит более двух членов.

4. Петя и Саша играют в интересную игру: Петя называет натуральное число от 2 до 9, Саша тоже называет натуральное число от 2 до 9 и умножает его на число, названное Петей. Затем Петя опять называет число от 2 до 9 и умножат его на произведение, получившееся у Саши. Затем, так же поступает Саша и так далее. Выигрывает тот, у кого произведение впервые станет больше чем 2020. Кто из мальчиков может всегда выиграть и как?

5. Функция определена при всех действительных значениях x и удовлетворяет условию $f(x) + xf(1-x) = 1$ при всех x. Найдите сумму всех действительных решений уравнения $2020f(x) + 1 = 0$.

Задание 1. 7

$x^2 + ax + 2a - 5 = 0$; по т. Виета: $x_1 + x_2 = -a$; $x_1 \cdot x_2 = 2a - 5$.

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (-a)^2 - 2(2a-5) = a^2 - 4a + 10$

Найдём наименьшее значение функции:

$y = a^2 - 4a + 10$

$a_6 = \frac{-6}{2a} = \frac{4}{2} = 2$

$y6 = 4 - 8 + 10 = 6$

Ответ: при $a = 2$.

Задание 3. 7

$a_n = a_{n-1} + q$; a_1 - чётное число;

$S_{нечёт.} = 33$;

$S_{чёт} = 44$;

Сумма всех членов данной прогрессии равна:

$S_n = 44 + 33 = 77$, где n - кол-во членов прогрессии.

Из условия можно сделать вывод о том, что q - число нечётное и целое.

Из определения: $\frac{S_n}{n}$ = либо среднему члену прогрессии, если число членов этой прогрессии нечётное, либо среднему арифметическому двух средних членов прогрессии, если число членов этой прогрессии чётное. Т. к. n - число целое, S - целое и все члены данной прогрессии целые из условия, ~~то число членов~~ и два соседних члена этой прогрессии не будет кратно двум (в силу нечётного q), что даст нецелое число после деления $\frac{S_n}{n}$, в случае с чётном кол-вом членов ~~прогрес~~ прогрессии, то этот вариант отпадает, => число членов этой прогрессии нечётное, и т. к. $77 \vdots 11, 7$, то $n = 7$, либо $n = 11$. Тогда:

1) $n = 7$:

$$\frac{S_7}{n} = \frac{77}{7} = 11 = a_4$$

$a_4 = a_1 + 3q$; т.к. a_1 – ~~не~~чётное, q – нечётное, целое, то

$a_1 = 8$, $q = 1$; $a_7 = 14$ | $a_1 = 14$, $q = -1$; $a_7 = 8$ | $a_1 = 2$, $q = 3$; $a_7 = 20$ | $a_1 = 20$, $q = -3$; $a_7 = 2$.

2) $n = 11$:

$$\frac{S_{11}}{n} = \frac{77}{11} = 7 = a_6$$

$a_6 = a_1 + 5q$, т.к. a_1 – чётное, q – нечётное, целое, то:

$a_1 = 2$, $q = 1$, но при проверке можно обнаружить, что сумма чётных и сумма нечётных членов прогрессии будут равны соответственно: 42 и 35, что не удовл. усл. задачи.

Ответ: $n = 7$: $a_1 = 8$, $a_7 = 14$, при $q = 1$; $a_1 = 14$, $a_7 = 8$, при $q = -1$; $a_1 = 2$, $a_7 = 20$, при $q = 3$; $a_1 = 20$, $a_7 = 2$, при $q = -3$.

Задание 4. 7б

Петя будет всегда выигрывать, если будет придерживаться следующей тактике: т.к. Петя называет число первым, то у него есть преимущество, его задача после очередного „хода" Саши сделать так, чтобы какое бы число ни назвал Саша на своём ходу это число превосходило 224 и не было больше 2020 (т.к. при минимальном числе после таких действий 225 Петя назовёт 9 и выиграет, а если число больше 225, то точно так-же победа Пети), другими словами предпоследним своим ходом Петя должен сделать так, чтобы получилось число меньше 225 (чтобы Саша не выиграл) и больше 112 (чтобы после первого какого хода Саши, число стало ≥ 224).

Примеры:

П:	6	1	9	
результат умн.		12		108
С:		2		

1)

П	2		2				9	
рез. умн.		4		8		16	144	← $112 < 144 < 225$
С		2			2			

как бы не пойдёт Саша победа Пети.

2)

Я	2			2				8	
рез. умн			6		12		24		192
С		3				2			

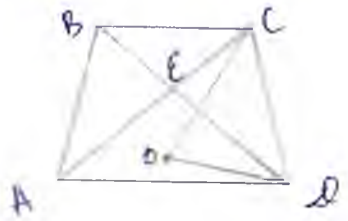
$\leftarrow$ $112 < 192 < 225$ – победа Яши.

3)

Я	9			9	
рез. умн.			18		162
С		2			

$\leftarrow$ $112 < 162 < 225$

Задание 2. 7



Дано: $ABCD$ трапеция, O – центр описанной около трапеции окружности, $AC = 2$, $\angle COD = 60°$

Найти: S_{ABCD}.

Решение:

1. Только вокруг равнобедренной трапеции можно описать окружность, $\Rightarrow$ $AB = CD$, $AC = BD = 2$.

2. Т.к. $\angle COD = 60°$, то $\angle CAD = 30°$, как вписанный, тогда $\angle BDA = 30°$, как угол, опирающийся на одну или равную дугу, тогда $\angle AED = 180 - (30 + 30) = 120°$, $\Rightarrow$ $\angle BEA = 180 - 120 = 60°$ (смежные), тогда $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Итого – 28 б

Работу проверили: /Шаталина О.А./

/Шляхова С.А./